



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025

### CLASA a 12-a SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă:** Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

**Problema 1** (autor \*\*\*, SGM nr. 10/2024 și \*\*\*, SGM 11/2024)

a) Fie  $A$  o mulțime de numere reale care este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale. Fie  $B$  și  $C$  două submulțimi nevide ale lui  $A$  astfel încât  $B \cap C = \emptyset$  și  $B \cup C = A$ . Se știe că  $abc \in B$ , pentru orice  $a, b, c \in B$  și  $abc \in C$ , pentru orice  $a, b, c \in C$ . Arătați că cel puțin una dintre mulțimile  $B$  și  $C$  este parte stabilă față de înmulțire.

b) Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $a, b$  două elemente distincte ale sale astfel încât  $G \setminus \{a, b\}$  este un subgrup al grupului  $(G, \cdot)$ . Demonstrați că  $G$  are cel mult 4 elemente.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Presupunem contrariul: există $x, y \in B$ și $s, t \in C$ astfel încât $xy \in C$ și $st \in B$	2p
Atunci $xyst = (xy)st \in C$ și $xyst = xy(st) \in B$ – contradicție	2p
b) Fie $x \in G \setminus \{a, b, e\}$ . Atunci $xa \neq a$ și $xa \notin G \setminus \{a, b\}$ (dacă $xa \in G \setminus \{a, b\}$ , atunci am avea $xa = t$ , de unde $a = x't \in G \setminus \{a, b\}$ – fals), deci $xa = b$	2p
Reiese că $x = ba'$ , deci $G$ nu poate avea decât elementele $e, a, b$ și, eventual, $ba'$	1p

**Problema 2** (autor \*\*\*)

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^{x^3}$ .

a) Demonstrați că nicio primitivă a lui  $f$  nu este bijectivă.

b) Demonstrați că există o primitivă  $F$  a funcției  $f$  astfel încât toate primitivele funcției  $F$  să fie bijective.

*Notă.* Pentru toate primitivele din problemă, domeniul de definiție și codomeniul sunt mulțimea numerelor reale.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Funcția $f$ este continuă, strict crescătoare, $f(0) > 0$ și $f(-1) < 0$ , deci există $x_0$ astfel încât $f(x) \geq 0$ pentru $x \in [x_0, \infty)$ și $f(x) \leq 0$ pentru $x \in (-\infty, x_0]$	1p
Reiese că, dacă $F$ este primitivă a lui $f$ , atunci $F(x) \geq F(x_0)$ , deci $F$ nu e surjectivă	2p
b) Adunând, eventual, o constantă, obținem o primitivă $F_0$ a lui $f$ astfel încât $F_0(x_0) = 1$ , deci $F_0(x) > 0$ , oricare ar fi numărul real $x$ . Atunci orice primitivă $G$ a lui $F_0$ este strict crescătoare, deci injectivă	2p

Din teorema lui Lagrange reiese $G(x) - G(x_0) = (x - x_0)G'(c_x) \geq x - x_0$ pentru $x \geq x_0$ , deci $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \infty$ ; analog $G(x) - G(x_0) \leq x - x_0$ pentru $x \leq x_0$ , de unde $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$ și, cum $G$ este continuă, deducem că $G$ este surjectivă.	<b>2p</b>
---	-----------

**Problema 3** (autor \*\*\*)

Fie  $n$  un număr natural și  $(G, \cdot)$  un grup cu  $2n+1$  elemente, astfel încât există o funcție  $f: G \rightarrow G$  cu proprietatea  $f(xf(xy)) = yf(x^2)$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ . Arătați că grupul este abelian.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $x = e$ obținem $f(f(y)) = yf(e)$	<b>1p</b>
Cum funcția $g: G \rightarrow G, g(t) = tf(e)$ este bijectivă, rezultă că $f$ este bijectivă	<b>1p</b>
Pentru $y = e$ obținem $f(xf(x)) = f(x^2)$ , deci $xf(x) = x^2$ , de unde $f(x) = x, \forall x \in G$	<b>2p</b>
Din ipoteză obținem acum $x^2y = yx^2$ , de unde (inductiv) $x^{2n+2}y = yx^{2n+2}$ și, cum ordinul grupului este $2n+1$ , reiese $xy = yx, \forall x, y \in G$	<b>3p</b>

**Problema 4** (autor \*\*\*)

Fie  $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții continue și crescătoare. Arătați că, pentru orice număr real  $x \geq 0$ ,  $x \cdot \int_0^x f(t)g(t)dt \geq \int_0^x f(t)dt \cdot \int_0^x g(t)dt$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Funcția $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x \int_0^x f(t)g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \cdot \int_0^x g(t)dt$ este derivabilă și $F'(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt + xf(x)g(x) - f(x) \int_0^x g(t)dt - g(x) \int_0^x f(t)dt$	<b>3p</b>
Avem $F'(x) = \int_0^x (f(t) - f(x))g(t)dt + g(x) \int_0^x (f(x) - f(t))dt = \int_0^x (f(x) - f(t))(g(x) - g(t))dt \geq 0$ , deci $F$ este crescătoare	<b>3p</b>
Cum $F(0) = 0$ , rezultă concluzia cerută	<b>1p</b>

*Observație.* Putem da și o soluție folosind sume Riemann: pentru  $n$  număr natural nenul luăm diviziunea  $0, \frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \dots, \frac{nx}{n}$ , punctele intermediare  $0, \frac{x}{n}, \dots, \frac{(n-1)x}{n}$  și obținem pentru integralele din enunț sumele Riemann  $S = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{xa_i b_i}{n}$ , respectiv  $T = \sum_{i=1}^n \frac{xa_i}{n} \sum_{i=1}^n \frac{xb_i}{n}$ , unde  $a_i = f\left(\frac{ix}{n}\right)$ ,  $b_i = g\left(\frac{ix}{n}\right)$ . Cum  $a_0 \leq \dots \leq a_{n-1}$  și  $b_0 \leq \dots \leq b_{n-1}$ , folosind inegalitatea de rearanjare avem

$$\sum a_i \sum b_i = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_{i+j} \right) \leq n \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i \text{ (indici luați modulo } n), \text{ deci } xS \geq T ;$$
 trecând la limită după  $n \rightarrow \infty$  obținem concluzia.